

مجموعه تست های جلسه اول درس هندسه و گسسته

۱) برای ۳ عدد طبیعی a, b, c ، اگر $abc \mid ab + ac$ ، آنگاه کدام گزاره همواره نمی تواند درست باشد؟

- ۱ $b \mid 3c$
 ۲ $c \mid 2b$
 ۳ $a \mid b + c$
 ۴ $bc \mid b + c$

۲) کدام یک از گزاره های زیر در حالت کلی درست نیست؟

- ۱ $a \mid b \Rightarrow a^4 \mid b^4$
 ۲ $a^5 \mid b^5 \Rightarrow a^6 \mid b^6$
 ۳ $a \mid b \Rightarrow a \mid 5a + 7b$
 ۴ $a \mid 5a + 7b \Rightarrow a \mid b$

۳) کدام یک از گزاره های زیر همواره درست است؟ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$)

- ۱ $b + c \mid a \Rightarrow b \mid a \vee c \mid a$
 ۲ $bc \mid a \Rightarrow b \mid a \wedge c \mid a$
 ۳ $a \mid b \xrightarrow{m \leq n} a^m \mid b^m$
 ۴ $a^3 \mid b^4 \Rightarrow a^5 \mid b^6$

۴) اگر سه عدد طبیعی a, b, c چنان باشند که $a \mid b - c$ و $a \mid b$ ، آنگاه کدام گزینه همواره درست است؟

- ۱ $b \mid c$
 ۲ $a \mid c$
 ۳ $c \mid a$
 ۴ $c \mid b$

۵) اگر $m^2 - 5m + 5 \mid n$ به ازای هر n برقرار باشد، آنگاه m چند مقدار متمایز دارد؟

- ۱
 ۲
 ۳
 ۴

۶) اگر $n^3 + 2n^2 - 3n \mid 0$ باشد چند مقدار طبیعی برای n وجود دارد؟

- ۱ صفر
 ۲ یک
 ۳ دو
 ۴ سه

۷) اگر عدد طبیعی a ، دو عدد $4k + 7$ و $8k + 1$ را عاد کند، آنگاه چند مقدار طبیعی برای a وجود دارد؟

- ۱
 ۲
 ۳
 ۴
 ۸

۸) اگر $2 \mid a + b$ ، $a, b \in \mathbb{Z}$ ، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

- ۱ $2 \mid a - b$
 ۲ $2 \mid ab$
 ۳ $2 \mid a$
 ۴ $2 \mid b$

۹) اگر $1 \mid 4k + 1$ و $3 \mid 6k + 3$ ، آنگاه برای a چند مقدار طبیعی وجود دارد؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- ۱
 ۲
 ۳
 ۴

۱۰) کدام یک از گزاره های زیر درست نیست؟ ($a, b, c \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$)

- ۱ $a \mid b \Leftrightarrow a^n \mid b^n$
 ۲ $b + c \mid a \Rightarrow b \mid a \vee c \mid a$
 ۳ $a \mid b \wedge b \mid c \Rightarrow a \mid c$
 ۴ $(k \in \mathbb{Z}, k \neq 0) a \mid b \Leftrightarrow ka \mid kb$

۱۱) عدد $24 + 14!$ بر کدام عدد بخش پذیر نیست؟

- ۱ ۳
 ۲ ۱۲
 ۳ ۹
 ۴ ۸

۱۲) کدام گزینه همواره صحیح است؟

- ۱ اگر $a \mid bc$ ، آنگاه $a \mid b$ یا $a \mid c$
 ۲ اگر $a \mid b + c$ ، آنگاه $a \mid b$ یا $a \mid c$
 ۳ اگر a زوج باشد، a^4 بر ۸ بخش پذیر است.
 ۴ اگر $a \mid b + c$ ، آنگاه $a \mid b$ و $a \mid c$

۱۳) کوچک ترین عدد اولی که همواره عدد $7^{32} + 5^{23}$ را می شمارد، کدام است؟

- ۱ ۲
 ۲ ۳
 ۳ ۵
 ۴ ۷

۱۴) اگر عدد طبیعی a ، دو عدد $3k + 1$ و $5k + 4$ را عاد کند، آن گاه بیشترین مقدار a کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- ۱ ۱
 ۲ ۳
 ۳ ۵
 ۴ ۷

۱۵) اگر $a|b + 1$ و $a|b^2 + 1$ باشد، کدام گزینه درست است؟

- ۱) $b|a$ ۲) $b|2$ ۳) $a|b$ ۴) $a|2$

۱۶) چند نقطه با مختصات صحیح، روی منحنی به معادله $yx = y + 5x + 2$ وجود دارد؟

- ۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بی‌شمار

۱۷) اگر x و y اعدادی صحیح باشند، به طوری که $x^y|y^x$ ، چه تعداد از روابط زیر همواره درست است؟

- الف) $x^5|y^5$ ب) $x^4|y^3$ ج) $x^3|y^2$ ۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۸) اگر در یک تقسیم، به مقسوم و مقسوم‌علیه عدد طبیعی n را اضافه نماییم و خارج قسمت و باقی‌مانده تغییر نکند، خارج قسمت کدام است؟

- ۱) ۰ ۲) ۱ ۳) n ۴) $-n$

۱۹) در یک تقسیم مقسوم‌علیه ۵۷ و باقی‌مانده ۱۸ است، چقدر باید به مقسوم اضافه کرد تا خارج قسمت یک واحد زیاد و باقی‌مانده برابر ۴۳ شود؟

- ۱) ۷۲ ۲) ۸۲ ۳) ۳۲ ۴) ۵۲

۲۰) اگر a بر ۳۸ و b بر ۵۷ بخش‌پذیر باشند، باقیمانده تقسیم a بر b بر کدام یک از عددهای زیر همواره بخش‌پذیر است؟

- ۱) ۲۲ ۲) ۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۹

۲۱) اگر باقی‌مانده تقسیم عدد a بر عدد b برابر r و باقی‌مانده تقسیم $a + 40$ بر $b + 2$ برابر $r - 4$ شده و خارج قسمت این دو تقسیم مساوی باشند آن‌گاه خارج قسمت کدام است؟

- ۱) ۲۲ ۲) ۲۳ ۳) ۲۴ ۴) ۲۵

۲۲) در تقسیم 107 بر چند عدد طبیعی و کوچک‌تر از 50 ، باقی‌مانده برابر 5 است؟

- ۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۳

۲۳) در یک تقسیم، مقسوم 62 واحد بیشتر از مقسوم‌علیه و باقی‌مانده برابر 17 است. خارج قسمت این تقسیم کدام است؟

- ۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۱۰

۲۴) در تقسیم عدد طبیعی a بر عدد طبیعی b ، خارج قسمت برابر 12 و باقیمانده برابر 9 است. رقم دهگان کوچک‌ترین عدد a کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۵) در یک تقسیم خارج قسمت برابر 28 و باقیمانده برابر 6 است. کدام رقم در کوچک‌ترین مقدار a بیشترین تکرار را دارد؟ (مقسوم‌علیه عددی مثبت است.)

- ۱) ۰ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۷

۲۶) در یک تقسیم اگر 196 واحد به مقسوم اضافه کنیم، 8 واحد به خارج قسمت اضافه شده، از باقی‌مانده 4 واحد کم می‌شود. مقسوم‌علیه این تقسیم کدام است؟

- ۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۱۰

۲۷) در تقسیمی، مقسوم 20 برابر باقیمانده و باقیمانده ماکسیمم است. مقسوم‌علیه حداکثر کدام است؟

- ۱) ۱۹ ۲) ۲۰ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

۲۸) در یک تقسیم باقیمانده برابر 27 و خارج قسمت برابر 13 می‌باشد، حداکثر چند واحد می‌توان به مقسوم‌علیه اضافه کرد بدون آنکه مقسوم و خارج قسمت تغییر نمایند؟

- ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵



۲۹ اگر در تقسیمی ۱۳۶ واحد به مقسوم و ۳ واحد به مقسوم علیه اضافه کنیم خارج قسمت تغییر نکرده اما به باقی مانده ۱ واحد اضافه می شود. در این تقسیم خارج قسمت برابر کدام یک از اعداد زیر است؟

۷۲ (۴)

۶۳ (۳)

۴۵ (۲)

۵۴ (۱)

۳۰ در تقسیم عدد ۲۵۹ بر b ، باقی مانده برابر ۳۱ است. چند مقدار طبیعی برای b وجود دارد؟

۱۰ (۴)

۹ (۳)

۷ (۲)

۵ (۱)





پاسخنامه تشریحی

۱ ۲ ۳ ۴ ۱

$$abc | ab + ac \Rightarrow abc | a(b+c) \xrightarrow{+a} bc | b+c \Rightarrow \begin{cases} b | b+c \Rightarrow b | c \Rightarrow b | 3c \\ c | b+c \Rightarrow c | b \Rightarrow c | 2b \end{cases}$$

برای گزینه ۴ مثال نقض $a=7$ و $b=2$ وجود دارد. ۱ ۲ ۳ ۴ ۲

مثال نقض گزینه‌های "۱"، "۳" و "۴" به صورت زیر است: ۱ ۲ ۳ ۴ ۳

گزینه "۱": $a=5, b=2, c=3$

گزینه "۳": $a=b=2, m=3, n=4$

گزینه "۴": $a=16, b=8$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴

$$\left. \begin{matrix} b | a \\ a | b - c \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{b | b - c}{b | b} \times (-1) \Rightarrow b | c$$

چون رابطه به ازای هر n برقرار است پس باید $m^2 - 5m + 5 = \pm 1$ داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$\begin{cases} 1) m^2 - 5m + 5 = 1 \Rightarrow m^2 - 5m + 4 = 0 \Rightarrow m = 1 \text{ یا } m = 4 \\ 2) m^2 - 5m + 5 = -1 \Rightarrow m^2 - 5m + 6 = 0 \Rightarrow m = 2 \text{ یا } m = 3 \end{cases}$$

با توجه به رابطه سوال، تنها به ازای $n^3 + 2n^2 - 3n = 0$ رابطه برقرار است، بنابراین داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۶

$$n(n^2 + 2n - 3) = 0 \Rightarrow n(n-1)(n+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 0 \\ n = 1 \\ n = -3 \end{cases}$$

پس ۱ مقدار طبیعی برای n وجود دارد.

هر گاه عددی، دو عدد را بشمارد آنگاه مجموع و تفاضل آن دو را نیز می‌شمارد، بنابراین داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۷

$$a | 4k + 1 \xrightarrow{\times 2} \left. \begin{matrix} a | 8k + 2 \\ a | 8k + 7 \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} a | 5 \Rightarrow a = 1 \text{ یا } 5$$

وقتی $a+b$ بر a بخش پذیر است یعنی a, b یا هر دو زوجند یا هر دو فرد پس تفاضل آنها نیز الزاماً زوج است و بر ۲ بخش پذیر است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۸

طبق فرض داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۹

$$\begin{cases} a | 4k + 1 \Rightarrow a | 12k + 3 \\ a | 6k + 3 \Rightarrow a | 12k + 6 \end{cases} \Rightarrow a | 3 \Rightarrow a = 1 \text{ یا } 3$$

به ازای $a=7, b=3, c=4$ گزینه (۲) برقرار نیست. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱

عدد ۱۴ بر اعداد ۳، ۸، ۹ و ۱۲ بخش پذیر است، بنابراین کافی است بخش پذیری عدد ۲۴ را بر این اعداد بررسی کنیم که در میان گزینه‌ها، عدد ۲۴ تنها بر ۹ بخش پذیر نیست.

در مورد گزینه سوم، اگر a زوج باشد داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲

$$2 | a \Rightarrow 2^f | a^f \Rightarrow 16 | a^f \Rightarrow 8 | a^f$$

در مورد مثال نقض سایر گزینه‌ها داریم:

$$8 | 4 \times 6 \rightarrow 8 \nmid 4, 8 \nmid 6$$

$$6 | 8 + 4 \rightarrow 6 \nmid 4, 6 \nmid 8$$

عدد $7^{32} + 5^{23}$ عددی زوج است. پس کوچک‌ترین عدد اولی که این عدد را می‌شمارد، عدد ۲ است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳

نکته: قضیه ترکیب خطی: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴

$$\left. \begin{matrix} a | b \\ a | c \end{matrix} \right\} \xrightarrow{m, n \in \mathbb{Z}} a | ma + nb$$



$$\left. \begin{array}{l} a \mid 3k + 1 \xrightarrow{\times 5} a \mid 15k + 5 \\ a \mid 5k + 4 \xrightarrow{\times 3} a \mid 15k + 12 \end{array} \right\} \Rightarrow a \mid 7$$

$$a \in \{ \text{شماره‌های طبیعی } 7 \} \Rightarrow a = 1 \text{ و } 7$$

بنابراین بیشترین مقدار a عدد 7 می‌باشد.

روش اول: می‌دانیم سمت راست رابطه بخش پذیری را در هر عدد دلخواهی می‌توان ضرب کرد. پس داریم:

$$a \mid b + 1 \xrightarrow{\times (b-1) \text{ «سمت راست»}} a \mid (b+1)(b-1) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a \mid b^2 - 1 \\ a \mid b^2 + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow a \mid 2$$

روش دوم:

$$a \mid b + 1 \xrightarrow{\times b \text{ «سمت راست»}} \left. \begin{array}{l} a \mid b^2 + b \\ a \mid b^2 + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow a \mid b - 1$$

از طرفی می‌دانیم $a \mid b + 1$ بنابراین:

$$\left. \begin{array}{l} a \mid b - 1 \\ a \mid b + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow a \mid 2$$

ابتدا معادله منحنی را به صورت y بر حسب x می‌نویسیم:

$$yx = y + 5x + 2 \Rightarrow y = \frac{5x + 2}{x - 1}$$

برای این که y عدد صحیح باشد، مخرج باید صورت کسر را بشمارد. داریم:

$$x - 1 \mid 5x + 2 \Rightarrow \alpha - 1 \mid 7 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 1 = 7, \quad x - 1 = 1 \\ x - 1 = -7, \quad x - 1 = -1 \end{array} \right.$$

می‌بینیم که 4 مقدار صحیح برای x وجود دارد.

راه حل اول: **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷**

$$\text{الف) } x^y \mid y^x \rightarrow x^x \times x^y \mid y^x \rightarrow x^x \mid y^x \rightarrow x \mid y \xrightarrow{\text{به توان 5}} x^5 \mid y^5 \checkmark$$

$$\text{ب) } x^y \mid y^x \xrightarrow{\text{به توان 4}} x^{24} \mid y^{16} \mid y^{21} \xrightarrow{\text{فرجه 7}} x^7 \mid y^3 \checkmark$$

$$\text{ج) } x^y \mid y^x \xrightarrow{\text{به توان 3}} x^{21} \mid y^{12} \mid y^{14} \xrightarrow{\text{فرجه 7}} x^3 \mid y^2 \checkmark$$

راه حل دوم: در صورتی ترکیب شرطی $a^m \mid b^n \Rightarrow a^p \mid b^q$ درست است که $\frac{m}{n} \geq \frac{p}{q}$ باشد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸

$$\left\{ \begin{array}{l} a = bq + r \\ a + n = (b+n)q + r \end{array} \right. \Rightarrow bq + r + n = bq + nq + r \Rightarrow nq = n \xrightarrow{n \neq 0} q = 1$$

فرض می‌کنیم x واحد می‌توان به مقسوم اضافه نمود.

در این صورت طبق قضیه تقسیم داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 57q + 18 \\ a + x = 57(q+1) + 43 \end{array} \right. \Rightarrow 57q + 18 + x = 57q + 100 \Rightarrow 18 + x = 100 \Rightarrow x = 82$$

طبق فرض $a = 38k$ و $b = 57k'$ ($k, k' \in \mathbb{Z}$) است. طبق قضیه تقسیم داریم:

$$a = bq + r \Rightarrow 38k = 57k'' + r \Rightarrow r = 38k - 57k'' = 19(2k - 3k'') \Rightarrow 19 \mid r$$

طبق قضیه تقسیم داریم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۲۱**

$$a = bq + r \quad (1)$$

$$a + 40 = (b+2)q + (r-4) \xrightarrow{(1)} bq + r + 40 = bq + 2q + r - 4 \Rightarrow 2q = 44 \Rightarrow q = 22$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۲

بنابر قضیه تقسیم داریم:

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b$$

$$107 = bq + 5 \Rightarrow 102 = bq \Rightarrow b \mid 102 \Rightarrow b \in \{1, 2, 3, 6, 17, 34, 51, 102\} \xrightarrow{5 < b < 50} b = 6, 17, 34$$

طبق قضیه تقسیم داریم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۲۳**

$$a = bq + r \Rightarrow 62 + b = bq + 17 \Rightarrow 45 = b(q-1) \xrightarrow{b > 17} \left\{ \begin{array}{l} b = 45 \\ q - 1 = 1 \rightarrow q = 2 \end{array} \right.$$

طبق قضیه تقسیم داریم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۲۴**

$$a = bq + r \Rightarrow a = 12b + 9 \quad (0 \leq r < 9)$$

$$b_{\min} = 10 \Rightarrow a_{\min} = 12 \times 10 + 9 = 129 \rightarrow \text{رقم دهگان} = 2$$



$$a = b(12) + 9 \xrightarrow{b > 9} a = 10(12) + 9 = 129$$

طبق قضیه تقسیم داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۵

$$a = bq + r, 0 \leq r < b$$

$$a = 28b + 6 \xrightarrow{6 < b} \min(b) = 7$$

$$\min(a) = 28 \times 7 + 6 = 202$$

رقم ۲ بیشترین تکرار را در کوچکترین مقدار a دارد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۶

$$a = bq + r \quad (I)$$

به مقسوم ۱۹۶ واحد و به خارج قسمت ۸ واحد اضافه کرده از باقی مانده ۴ واحد کم می کنیم:

$$a + 196 = b(q + 8) + r - 4 \quad (II)$$

حال اگر دو رابطه را از هم کم کنیم، داریم:

$$(I) - (II) : 196 = 8b - 4 \Rightarrow 8b = 200 \Rightarrow b = 25$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۷

نکته: اگر $a \in \mathbb{Z}$ و $b \in \mathbb{N}$ آنگاه اعداد منحصر بفرد r و q یافت می شود که $a = bq + r$ در این قضیه $0 \leq r < b$ می باشد.

$$\left. \begin{array}{l} a = bq + r \\ r = r_{\max} = b - 1 \\ a = 20r \end{array} \right\} \Rightarrow 20r = bq + r \rightarrow 19r = bq \xrightarrow{r = r_{\max} = b - 1} 19(b - 1) = bq$$

$$\rightarrow 19b - 19 = bq \rightarrow 19 = b(19 - q) \rightarrow \begin{cases} b = 19 \\ 19 - q = 1 \end{cases}$$

قضیه تقسیم را به صورت $a = 13b + 27$ و مقدار اضافه شده به مقسوم علیه را x در نظر می گیریم. در این صورت داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۸

$$a = 13b + 27 \Rightarrow a = (b + x) \times 13 + 27 - 13x$$

$$r < b \Rightarrow 27 - 13x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{27}{13} \xrightarrow{x \in \mathbb{N}} \max(x) = 2$$

طبق قضیه تقسیم داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۹

$$a = bq + r$$

$$a + 136 = (b + 3)q + (r + 1) \Rightarrow bq + r + 136 = bq + r + 136 = bq + 3q + r + 1 \Rightarrow 3q = 135 \Rightarrow q = 45$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۰

$$a = bq + r \quad 0 < r < b$$

$$259 = bq + 31 \xrightarrow{31 < b} 228 = bq \Rightarrow b | 228$$

از طرفی $31 < b$ پس چون $228 = 1 \times 228 = 2 \times 114 = 3 \times 76 = 4 \times 57 = 6 \times 38$ داریم:

$$\begin{cases} b = 38, q = 6 \\ b = 57, q = 4 \\ b = 76, q = 3 \\ b = 114, q = 2 \\ b = 228, q = 1 \end{cases}$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴

۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴

۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴

۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴

